



تشریحی ۱۳۹۶ متوسط

۱

بارم: ۱

حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-1)^{[x]}}{\sin x}$ کدام است؟ ([]، نماد جز صحیح است).

تشریحی ۱۳۹۷ ساده

۲

بارم: ۱

اگر چند جمله‌ای $f(x) = 3x^3 + ax^2 - bx + 6$ بر $(x+3)$ و $(x-1)$ بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه حاصل $2a+b$ برابر کدام است؟

تشریحی ۱۳۹۵ متوسط

۳

بارم: ۱

اگر $f(x+1) = \frac{1}{x^2-1}$ باشد، آن‌گاه حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ کدام است؟

تشریحی ۱۳۹۹ ساده

۴

بارم: ۱

حاصل حد راست تابع $f(x) = \frac{|2-x|}{\sqrt{x+6}-x}$ در نقطه $x=3$ کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است).

نهایی ۱۴۰۲ متوسط

۵

بارم: ۱

حد زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x^2 - x - 2}{|x^2 - 3x + 2|}$$

نهایی ۱۴۰۲ ساده

۶

بارم: ۱

حد تابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{2x-1}}{x^2 - x}$$

تشریحی ۱۳۹۵ متوسط

۷

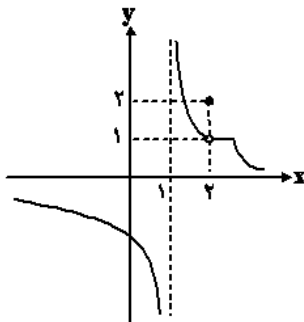
بارم: ۱

اگر $f(x) = \begin{cases} 3x+1, & x > 1 \\ x+1, & x = 1 \\ x^2+2, & x < 1 \end{cases}$ و $g(x) = 3-x$ باشند، حد تابع $(f \circ g)(x)$ وقتی $x \rightarrow 2^-$ کدام است؟

تشریحی ۱۳۹۸ ساده

۸

بارم: ۱

نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x - f(2f(x))}$ کدام است؟

تشریحی ۱۳۹۹ ساده

۹

بارم: ۱

اگر $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 4$ بر $x-1$ بخش‌پذیر باشد و باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $x+2$ برابر -12 باشد، مقدار $f(-1)$ کدام است؟

۱۰

متوسط تشریحی ۱۳۹۸

بارم: ۱ اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x}{3x^2 - ax + b} = -\infty$ باشد، آن گاه حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax - 12}{x^2 + 11 - b}$ کدام است؟

۱۱

متوسط تشریحی ۱۳۹۸

بارم: ۱ اگر $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^3 + 2x^2 + x + k}{1 - x^2} = L$ باشد، مقدار $L - k$ کدام است؟ (L عددی حقیقی مشخص و مخالف صفر است.)

۱۲

متوسط نهایی ۱۳۹۹

بارم: ۱ حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - \sqrt{x+6}}$ ب) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x] - 3}{x - 3}$

۱۳

متوسط تشریحی ۱۳۹۴

بارم: ۱ حاصل $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{3})^-} \frac{\tan x + \sqrt{3}}{\tan x - \sqrt{3}}$ کدام است؟

۱۴

متوسط تشریحی ۱۳۹۷

بارم: ۱ اگر $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ و $g(x) = \frac{5x+1}{3x^2-1}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} g \circ f(x)$ کدام است؟

۱۵

متوسط تشریحی ۱۳۹۴

بارم: ۱ اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{ax^2 + 2x + b} = 2$ باشد، آن گاه $a - b$ کدام است؟

۱۶

ساده تشریحی ۱۳۹۹

بارم: ۱ اگر $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{5x - 2}{-2x^2 + ax + b} = +\infty$ مقدار $\frac{a}{b}$ کدام است؟

۱۷

ساده نهایی ۱۴۰۲

بارم: ۱ حد تابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{3})^+} \frac{1}{\cos x}$

۱۸

دشوار تشریحی ۱۳۹۶

بارم: ۱ حاصل $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{3})^+} \left(\frac{3}{|-2x^2 - x + 1|} - \frac{4}{3x^2 - 1} \right)$ کدام است؟

۱۹

ساده تشریحی ۱۳۹۹

بارم: ۱ تابع f پیوسته و اکیداً نزولی بوده و $f(3) = 2$ است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 6}{f(x) - 2}$ کدام است؟

۲۰

متوسط نهایی ۱۴۰۲

بارم: ۱ حد تابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2 - \sqrt{x-1}}{x-5}$

(۲۱)

اگر تابع f در نقطه $x = 1$ حدی مخالف صفر داشته باشد، $f(1)$ کدام است؟

دشوار

تشریحی ۱۳۹۷

بارم: ۱

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2-3x+a} & , x > 1 \\ a+b & , x = 1 \\ \frac{b(x-1)}{|x-1|} & , x < 1 \end{cases}$$

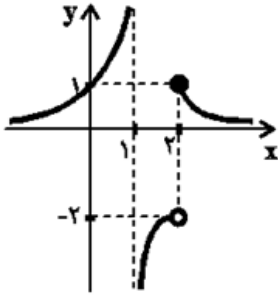
(۲۲)

نمودار تابع f به صورت مقابل است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} f \circ f(x)$ کدام است؟

ساده

تشریحی ۱۳۹۸

بارم: ۱



(۲۳)

حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - |x-2|}{\sqrt{x}-1}$ کدام است؟

متوسط

تشریحی ۱۳۹۴

بارم: ۱

(۲۴)

حد زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

ساده

نهایی ۱۴۰۲

بارم: ۱

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$$

(۲۵)

حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x^2 - 8x + 4}{x^2 - 4x + 4}$ کدام است؟

ساده

تشریحی ۱۳۹۷

بارم: ۱

(۲۶)

تابع $f(x) = \frac{x^2-2}{x-1} + \frac{x^2+x}{x^2-1}$ مفروض است. اگر $\lim_{x \rightarrow a} f^{-1}(x) = 1$ باشد، a کدام است؟

دشوار

تشریحی ۱۳۹۴

بارم: ۱

(۲۷)

اگر حاصل حد تعریف شده $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax^2 + 4x}{x^2 - 4} = b$ باشد، آن گاه حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5x - 3a}{x^2 + 4b}$ کدام است؟ ($b \neq 0$)

دشوار

تشریحی ۱۳۹۸

بارم: ۱

(۲۸)

حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x-1}{1-\sin x}$ کدام است؟

ساده

تشریحی ۱۳۹۹

بارم: ۱

(۲۹)

تابع $f(x) = x^3 + 2x^2 - a$ بر $x+a$ بخش پذیر است. اگر $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x-a)^2} = +\infty$ باشد، مقدار a کدام است؟

متوسط

تشریحی ۱۳۹۸

بارم: ۱

(۳۰)

تابع $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x + 3\sqrt{x} - 4}$ مفروض است. اگر $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$ باشد، آن گاه $a - b$ کدام است؟

متوسط

تشریحی ۱۳۹۹

بارم: ۱

(۳۱)

حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 4x + 3}{(x-1)^2}$ کدام است؟

تشریحی ۱۳۹۹ ساده

بارم: ۱

(۳۲)

حد توابع زیر را به دست آورید.

تشریحی ۱۴۰۰ متوسط

بارم: ۱

الف) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{[x] - 3}{x - 3}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x+1} - 2}$

(۳۳)

اگر $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - 4x} = \frac{3}{4}$ باشد، مقدار $a + b$ کدام است؟

تشریحی ۱۳۹۹ متوسط

بارم: ۱

(۳۴)

حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - [\sin x]}{1 + \tan x}$ کدام است؟ ([]، [] نماد جزء صحیح است.)

تشریحی ۱۳۹۸ ساده

بارم: ۱

(۳۵)

حد عبارت $\frac{\sqrt{\tan x} - \sqrt{\frac{1}{\tan x}}}{\cos 2x}$ وقتی $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$ کدام است؟

تشریحی ۱۳۹۷ دشوار

بارم: ۱

(۳۶)

درست یا نادرست بودن عبارت زیر را مشخص کنید.

- حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4-x}{\sqrt{x+5}}$ برابر با $-\frac{1}{\sqrt{5}}$ است.

تشریحی ۱۴۰۲ متوسط

بارم: ۱

(۳۷)

حد تابع $f(x) = \frac{\sin 3x + 1}{3 \tan^2 x - 1}$ در برابر $-\infty$ است.

تشریحی ۱۴۰۰ ساده

بارم: ۱

(۳۸)

اگر $f(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{\sqrt{x} - 2}$ ، حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ کدام است؟

تشریحی ۱۳۹۷ متوسط

بارم: ۱

(۳۹)

حد تابع زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{[x]}{|2x+1|}$$

تشریحی ۱۴۰۲ متوسط

بارم: ۱

(۴۰)

حد چپ تابع $f(x) = \frac{2x - [x+1]}{|x-x|}$ وقتی $x \rightarrow 0$ ، کدام است؟ ([]، [] علامت جزء صحیح است.)

تشریحی ۱۳۹۶ متوسط

بارم: ۱

(۴۱)

حاصل $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x + 2}{2 \cos^2 x + \cos x - 1}$ کدام است؟

تشریحی ۱۳۹۹ دشوار

بارم: ۱

(۴۲)

تشریحی قلمچی ۱۳۹۸ متوسط

حاصل حد $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + x - 10}{x^2 - 4}$ را بیابید.

بارم: ۲

(۴۳)

تشریحی ۱۳۹۷ متوسط

اگر $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x+2}{x^2+ax+b} = -\infty$ مقدار $a-b$ کدام است؟

بارم: ۱

(۴۴)

تشریحی ۱۳۹۹ دشوار

حاصل $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{[x]}{\tan x}$ کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)

بارم: ۱

(۴۵)

تشریحی ۱۳۹۵ دشوار

حاصل $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \left(\frac{x-2}{x^2-1} + \frac{2}{x^2+|x|-2} \right)$ کدام است؟

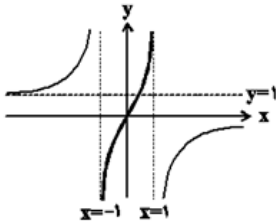
بارم: ۱

(۴۶)

تشریحی ۱۳۹۹ متوسط

نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^-} [(f \circ f)(x)]$ کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)

بارم: ۱



(۴۷)

تشریحی ۱۳۹۵ متوسط

اگر حد تابع $f(x) = \frac{ax - \sqrt{x^2 + x}}{3x - 1}$ وقتی $x \rightarrow +\infty$ برابر ۲ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ کدام است؟

بارم: ۱

(۴۸)

تشریحی قلمچی ۱۳۹۹ متوسط

الف) برای رسم نمودار تابع $y = f(x)$ ، کافی است طول نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را در ضرب کنیم.

بارم: ۱

ب) تابع f را متناوب می نامیم هرگاه عدد حقیقی و مثبت مانند T موجود باشد به طوری که برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم وپ) حد تابع $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & x > 0 \\ \frac{3x^2 - 4x}{1-x^2} & x \leq 0 \end{cases}$ وقتی $x \rightarrow -\infty$ برابر است.

(۴۹)

نهایی ۱۴۰۰ متوسط

حدهای زیر را محاسبه کنید:

بارم: ۱

الف) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 2x^2}{-x^2 + 2}$

ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{5x^{10}} - 2x + 3}{\sqrt{x^6} + 2}$

۵۰

تشریحی قلم‌چی ۱۳۹۷

متوسط

حدود زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. ([] نماد جزء صحیح است.)

بارم: ۲

الف) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3 - x^2}{1 - x^4}$

پ) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sqrt{3-x}}{(x-3)^2}$

ت) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - [x]}{x - 1}$

۵۱

نهایی ۱۴۰۲

متوسط

حد زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

بارم: ۱

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x+1}{x-5} - \frac{2}{x} \right)$

۵۲

تشریحی ۱۳۹۷

متوسط

اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 2x - 1}{x + 1} + ax + b \right) = 3$ ، آن‌گاه $a - b$ کدام است؟

بارم: ۱

۵۳

تشریحی ۱۳۹۴

دشوار

حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2(x - \sqrt[3]{x^3 + 1})$ کدام است؟

بارم: ۱

۵۴

تشریحی ۱۳۹۶

متوسط

اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(m-1)x + \sqrt{nx-1}}{3\sqrt{x+2} + 2} = 2$ ، آن‌گاه $m + n$ کدام است؟

بارم: ۱

۵۵

تشریحی قلم‌چی ۱۳۹۷

متوسط

الف) رابطه $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$ را معنی کنید.

بارم: ۲

ب) اگر $f(x) = \frac{|x| + 3}{ax - 2}$ ، مقدار a را طوری تعیین کنید که $f(x)$ ویژگی عنوان شده در الف) را داشته باشد.

پ) حد تابع $\frac{x^2 + 2x + 3}{3x - x^2}$ را در وقتی $x \rightarrow -\infty$ را به دست آورید.

۵۶

تشریحی ۱۴۰۰

ساده

اگر $f(x) = \frac{2 - x^2}{ax^2 + 6x + b}$ و $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ کدام است؟

بارم: ۱

۵۷

تشریحی ۱۳۹۴

متوسط

بیش‌ترین مقدار $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^n + x^2 + 1}{3x^n - x^2 + 3}$ ، به ازای مقادیر مختلف و طبیعی n کدام است؟

بارم: ۱

۵۸

تشریحی ۱۳۹۷

متوسط

اگر $f(x) = \frac{(m^2 - 1)x^2 + (2m + 3)x^3 + 2x^2 - 1}{mx + 5}$ و $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -\infty$ باشد، مقدار m کدام است؟

بارم: ۱

۵۹

تشریحی ۱۴۰۰

ساده

اگر $f(x) = \frac{2x + a|x - 2|}{ax + |x| + 1}$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ کدام است؟

بارم: ۱

۶۰

متوسط

تشریحی ۱۳۹۵

بارم: ۱

حد عبارت $\frac{2x - \sqrt{x^2 + 2x - 1}}{x + \sqrt{1 - 2x}}$ وقتی $x \rightarrow -\infty$ کدام است؟

۶۱

متوسط

تشریحی قلمچی ۱۳۹۹

بارم: ۲.۲۵

به سؤالات زیر پاسخ دهید:

الف) با توجه به نمودار تابع $y = f(x)$ حدود زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

۱) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

۲) $\lim_{x \rightarrow (-3)^-} f(x)$

۳) $\lim_{x \rightarrow (-\infty)} f(x)$

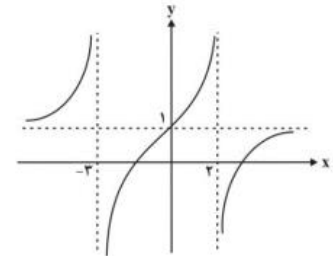
ب) حاصل حدهای زیر را در صورت وجود بیابید.

۱) $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{3})^+} \frac{x}{1 - \sin x}$

۲) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 4x}{1 - x}$

۳) $\lim_{x \rightarrow (-\infty)} \frac{-2x + 3}{\sqrt{9x^2 + 6x}}$

قسمت الف)



۶۲

دشواری

تشریحی ۱۳۹۸

بارم: ۱

اگر $f(x) = 2x + \sqrt{4x^2 + x}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ کدام است؟

۶۳

ساده

نهایی ۱۴۰۲

بارم: ۱

حد زیر را در صورت وجود، محاسبه کنید.

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{x^2}}{x - 1}$

۶۴

متوسط

نهایی ۱۴۰۰

بارم: ۱

حدهای زیر را محاسبه کنید:

الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^6 - 2x^2}{-x^3 + 2}$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{5x^{10}} - 2x + 3}{\sqrt{x^6 + 2}}$

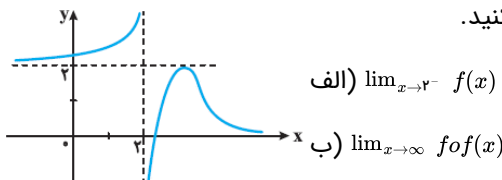
۶۵

متوسط

نهایی ۱۴۰۲

بارم: ۱

نمودار تابع f به صورت شکل مقابل است. حدهای زیر را محاسبه کنید.



الف) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

ب) $\lim_{x \rightarrow \infty} f \circ f(x)$

۶۶

متوسط

تشریحی ۱۳۹۹

در تابع $f(x) = \frac{3x - \sqrt{x^2 + 16x}}{ax^n + b}$ اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$ و $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = c$ باشند، آن گاه عدد حقیقی c کدام است؟ (۵ پاسخ)

۶۷

ساده

تشریحی ۱۳۹۹

بارم: ۱

حد تابع $f(x) = \frac{x^2 - 8x}{\sqrt[3]{x} - 2}$ در $x=8$ کدام است؟

۶۸

متوسط

تشریحی ۱۳۹۹

بارم: ۱

اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - x + 1}{ax^2 - 1} = 2$ باشد، آن گاه حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 - x + 1}{ax^2 - 1}$ کدام است؟

۶۹

ساده

تشریحی ۱۳۹۹

بارم: ۱

اگر حد تابع $f(x) = \frac{x - 2}{ax - \sqrt{x^2 + 5}}$ وقتی $x \rightarrow -\infty$ برابر $\frac{5}{4}$ باشد، آنگاه حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ کدام است؟

۷۰

ساده

نهایی ۱۴۰۲

بارم: ۱

آیا مقدار $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{[x] - 1}$ وجود دارد؟ چرا

۷۱

دشوار

نهایی ۱۳۹۹

بارم: ۱

الف) حد توابع زیر را در صورت وجود بیابید.

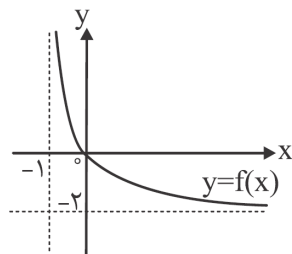
۱) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[x]}{\sin x} =$

ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{(x-1)(x+2)} =$

ب) با استفاده از نمودار تابع $y = f(x)$ ، حدهای خواسته شده را بنویسید.

۱) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$

ب) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) =$



متوسط

نهایی ۱۴۰۱

بارم: ۱

حد زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1}}{x^2 - 1}$

متوسط

تشریحی ۱۳۹۴

بارم: ۱

اگر حد تابع $f(x) = \frac{2x - \sqrt{x^2 + 3x}}{ax + 1}$ وقتی $x \rightarrow -\infty$ برابر ۱ باشد، $f(-3)$ کدام است؟

۷۴

متوسط

نهایی ۱۴۰۲

بارم: ۱

حد تابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x^2}}{\frac{4}{x} - 5}$

۷۵

متوسط تشریحی ۱۳۹۷

بارم: ۱

مقدار $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \left[\frac{2}{1-x} \right]$ کدام است؟ (علامت جزء صحیح است.)

۷۶

ساده تشریحی ۱۳۹۹

بارم: ۱

اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-a|x-1|}{\sqrt[3]{8x^3-x}}$ مقدار a کدام است؟

۷۷

دشوار تشریحی ۱۳۹۸

بارم: ۱

حد تابع $f(x) = 2\sqrt{x} - \sqrt{4x - 2\sqrt{x}}$ وقتی $x \rightarrow +\infty$ کدام است؟

۷۸

متوسط تشریحی ۱۳۹۴

بارم: ۱

اگر حد کسر $\frac{ax - \sqrt{4x-3}}{\sqrt{x^2-6x+9}}$ وقتی $x \rightarrow +\infty$ برابر یک باشد. آنگاه حد این کسر وقتی $x \rightarrow 3^-$ کدام است؟

۷۹

ساده نهایی ۱۴۰۱

بارم: ۱

در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.

حاصل حد تابع $f(x) = \frac{2x^2}{3x^2-1}$ وقتی $x \rightarrow +\infty$ میل می‌کنند برابر است.

۸۰

ساده تشریحی ۱۳۹۹

بارم: ۱

مقدار $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x - 4^{-x}}{3^{-x} + 4^{x+1}}$ کدام است؟

۸۱

ساده تشریحی ۱۳۹۷

بارم: ۱

تابع $f(x) = \frac{3x^k - x^2 + 3}{2x^k + 4x^2 + 5}$ مفروض است. اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{1}{3}$ باشد، k کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

۸۲

متوسط نهایی ۱۴۰۲

بارم: ۱

حاصل حد زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5x^2 + 3x - 7}{(x^2 + 1)(2x + 5)}$$

۸۳

متوسط تشریحی ۱۳۹۶

بارم: ۱

نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{ax+1+\sqrt{4x^2+9}}{3x-2}$ از نقطه $(2, 1)$ می‌گذرد، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ کدام است؟

۸۴

متوسط تشریحی ۱۳۹۸

بارم: ۱

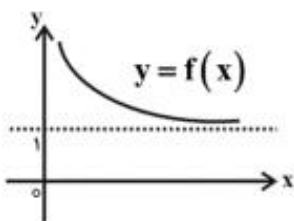
اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^n \left[\frac{1}{x} \right] + 6x^2 - 1}{4x^2 - (1+n)x^m + 5} = \frac{3}{2}$ حاصل mn کدام است؟

۸۵

متوسط تشریحی ۱۳۹۷

بارم: ۱

با توجه به نمودار تابع $y = f(x)$ حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - \sqrt{f(x)}}{1 - f(x)}$ کدام است؟



۸۶

حدود زیر را محاسبه کنید.

متوسط نهایی ۱۴۰۰

بارم: ۱

الف) $\lim_{x \rightarrow x^{-1}} \frac{[\cos \mathbf{F}x]}{\tan x}$

ب) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x-6)(2x-7)(4x+1)}{17x^3+5}$

ساده تشریحی ۱۳۹۹

بارم: ۱

اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{mx^3 + x^2 + 1}{6x^n - x} = -\frac{2}{3}$ باشد، حاصل $m+n$ کدام است؟

ساده نهایی ۱۴۰۱

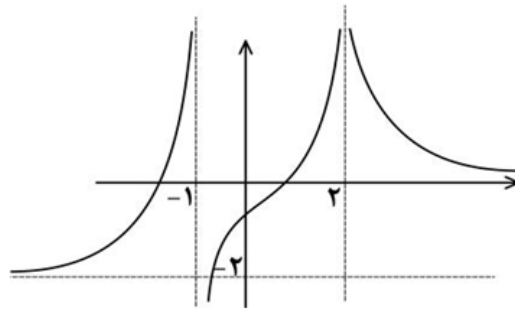
بارم: ۱

نمودار تابع f به شکل مقابل است. حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

پ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$



متوسط تشریحی ۱۳۹۷

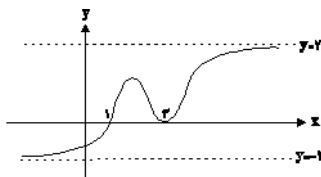
بارم: ۱

اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|3a|x^5 - ax^n + 7x^2 - 2}{4x^5 + 1} = 1$ ، آن گاه مجموع مقادیر ممکن برای a کدام است؟

متوسط تشریحی ۱۴۰۰

بارم: ۱

اگر $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ و نمودار تابع f به صورت زیر باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 3} f(g(x)) - \lim_{x \rightarrow 1^-} f(g(x))$ کدام است؟



متوسط

تشریحی ۱۳۹۶

گزینه درست: null

سوال ۱

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(-1)^{[x]}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(-1)^0}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(-1)^{[x]}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(-1)^{-1}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{\sin x} = \frac{-1}{0^-} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-1)^{[x]}}{\sin x} = +\infty \end{cases}$$

ساده

تشریحی ۱۳۹۷

گزینه درست: null

سوال ۲

اگر $f(x)$ بر $x - a$ بخش پذیر باشد، آن گاه $f(a) = 0$ است. پس داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow f(-3) = 0 \\ x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow f(1) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3 \times (-3)^3 + a \times (-3)^2 - b(-3) + 6 = 0 \Rightarrow 9a + 3b = 75 \\ 3 + a - b + 6 = 0 \Rightarrow a - b = -9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a + b = 25 \\ a - b = -9 \end{cases} \Rightarrow 4a = 16 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow 4 - b = -9 \Rightarrow b = 13$$

$$\Rightarrow 2a + b = 2 \times 4 + 13 = 21 \quad \text{در نتیجه:}$$

متوسط

تشریحی ۱۳۹۵

گزینه درست: null

سوال ۳

باید $x \rightarrow 0^+$ میل کند. پس $x \rightarrow (-1)^+$ میل می کند.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x+1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{((-1)^+)^2 - 1} \\ &= \frac{1}{1 - 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty \end{aligned}$$

ساده

تشریحی ۱۳۹۹

گزینه درست: null

سوال ۴

گزینه «۳»

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{[2-x]}{\sqrt{x+6}-x} &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-2}{\sqrt{x+6}-x} \times \frac{\sqrt{x+6}+x}{\sqrt{x+6}+x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-2(\sqrt{x+6}+x)}{x+6-x^2} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-2(6)}{-(x^2-x-6)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{12}{(x-3)(x+2)} = +\infty \end{aligned}$$

توجه کنید که در همسایگی راست نقطه ۳، تابع $y = [2-x]$ بر خط $y = -2$ منطبق است:

$$3 < x < 4 \Rightarrow -4 < -x < -3 \Rightarrow -2 < 2-x < -1 \Rightarrow [2-x] = -2$$

متوسط

نهایی ۱۴۰۲

گزینه درست: null

سوال ۵

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x^2 - x - 2}{\underbrace{x^2 - 3x + 2}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x^2 - x - 2}{-(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(3x+2)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x+2}{2-x} = 5$$

عبارت منفی است

ساده

نهایی ۱۴۰۲

گزینه درست: null

سوال ۶

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{2x-1}}{x^2 - x} &= \frac{0}{0} \\ &= \frac{x - \sqrt{2x-1}}{x(x-1)} \times \frac{x + \sqrt{2x-1}}{x + \sqrt{2x-1}} = \frac{\overbrace{x^2 - 2x + 1}^{(x-1)^2}}{2x(x-1)} = \frac{x-1}{2x} = \frac{0}{2} = 0 \end{aligned}$$

متوسط

تشریحی ۱۳۹۵

گزینه درست: null

سوال ۷

برای یافتن حد تابع $y = (f \circ g)(x)$ وقتی $x \rightarrow 2^-$ ، ابتدا حد تابع $g(x)$ را وقتی $x \rightarrow 2^-$ می‌یابیم، سپس در حد به دست آمده، حد تابع f را می‌یابیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 3 - x = 3 - 2 = 1$$

چون تابع g با مقادیر بیش‌تر از یک به یک نزدیک می‌شود، پس:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 3x + 1 = 4$$

ساده

تشریحی ۱۳۹۸

گزینه درست: null

سوال ۸

توجه کنید که در همسایگی راست نقطه $x = 2$ تابع f تابع ثابت $y = 1$ برابر است. پس در این همسایگی داریم:

$$f(x) = 1 \Rightarrow f(f(x)) = 1 \Rightarrow f(f(f(x))) = f(1) = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x - f(f(x))} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x - 1} = +\infty$$

ساده

تشریحی ۱۳۹۹

گزینه درست: null

سوال ۹

$$f(1) = 0 \Rightarrow 1 + a + b - 4 = 0 \Rightarrow a + b = 3 \quad (I)$$

$$f(-2) = -12 \Rightarrow -8 + 4a - 2b - 4 = -12 \Rightarrow 2a - b = 0 \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(I, II)} a = 1, b = 2$$

$$\Rightarrow f(x) = x^3 + x^2 + 2x - 4 \Rightarrow f(-1) = -1 + 1 - 2 - 4 = -6$$

متوسط

تشریحی ۱۳۹۸

گزینه درست: null

سوال ۱۰

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x}{3x^2 - ax + b} = -\infty \Rightarrow \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

با توجه به علامت صورت کسر و حاصل حد، مخرج در همسایگی 2 باید به صورت 0^+ باشد، پس مخرج به شکل $3(x-2)^2$ است.

$$3x^2 - ax + b = 3(x-2)^2$$

$$\Rightarrow 3x^2 - ax + b = 3x^2 - 12x + 12 \Rightarrow \begin{cases} a = 12 \\ b = 12 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax - 12}{x^2 + 11 - b} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{12x - 12}{x^2 + 11 - 12} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{12x - 12}{x^2 - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{12(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{12}{x+1} = \frac{12}{2} = 6$$

حد مخرج کسرداده شده برابر با صفر است: $\lim_{x \rightarrow -1} (1 - x^2) = 0$

چون حاصل حد برابر با یک عدد حقیقی شده است، پس حد صورت هم باید صفر باشد، چون در غیر این صورت حاصل حد، نامتناهی می‌شود:

$$\begin{aligned} \text{حد صورت} = 0 &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} (3x^3 + 2x^2 + x + k) = 0 \\ \Rightarrow -3 + 2 - 1 + k &= 0 \Rightarrow k = 2 \end{aligned}$$

با جایگذاری $k = 2$ ، صورت را بر $x + 1$ تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{r} 3x^3 + 2x^2 + x + 2 \quad | \quad x - 1 \\ \underline{-3x^3 - 3x^2} \\ -x^2 + x + 2 \\ \underline{x^2 + x} \\ 2x + 2 \\ \underline{-2x - 2} \\ 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow 3x^3 + 2x^2 + x + 2 = (x + 1)(3x^2 - x + 2)$$

$$L = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(3x^2 - x + 2)}{(1 - x)(1 + x)} = \frac{6}{2} = 3$$

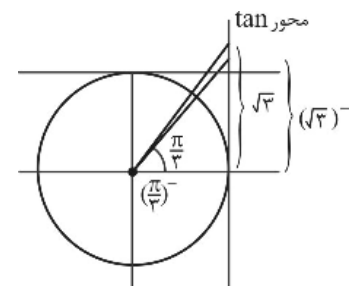
حالا با ساده کردن عامل صفرکننده از صورت و مخرج، حاصل حد را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{پس: } L - k = 3 - 2 = 1$$

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x + 1)(x + \sqrt{x + 6})}{x^2 - x - 6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x + 1)(x + \sqrt{x + 6})}{(x + 2)(x - 3)} = \frac{24}{5}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-1}{x - 3} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

با توجه به دایره‌ی مثلثاتی به ازای $x = \frac{\pi}{3}$ مقدار $\tan x = \sqrt{3}$ است و اگر $x \rightarrow \left(\frac{\pi}{3}\right)^-$ آنگاه $\tan x \rightarrow (\sqrt{3})^-$.



$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{3}\right)^-} \frac{\tan x + \sqrt{3}}{\tan x - \sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3})^- + \sqrt{3}}{(\sqrt{3})^- - \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{0^-} = -\infty$$

سوال ۱۴

گزینه درست: null

تشریحی ۱۳۹۷

متوسط

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} g \circ f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} g\left(\frac{x+1}{x-2}\right) = \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^+} g(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^+} \frac{5x+1}{4x^2-1} = \frac{-\frac{3}{2}}{0^-} = +\infty \end{aligned}$$

سوال ۱۵

گزینه درست: null

تشریحی ۱۳۹۴

متوسط

وقتی $x \rightarrow 1$ ، صورت کسر صفر می‌شود. پس مخرج نیز باید صفر شود تا حالت مبهم $\frac{0}{0}$ ایجاد شده و بعد از رفع ابهام به عدد ۲ برسیم، پس $x=1$ باید ریشه‌ی مخرج باشد:

$$a(1)^2 + 2(1) + b = 0 \Rightarrow a + 2 + b = 0 \Rightarrow b = -a - 2 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{ax^2 + 2x + b} &\stackrel{(1)}{\rightarrow} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{ax^2 + 2x - a - 2} = 2 \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)}{a(x-1)(x+1) + 2(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(a(x+1) + 2)} = 2 \\ &\Rightarrow \frac{-1}{2a+2} = 2 \Rightarrow a = \frac{-5}{2}, b = \frac{-3}{2} \\ &\Rightarrow a - b = \frac{-5}{2} + \frac{3}{2} = -1 \end{aligned}$$

سوال ۱۶

گزینه درست: null

تشریحی ۱۳۹۹

ساده

$$\lim_{x \rightarrow -3} (5x - 2) = -17$$

چون حد صورت کسر برابر ۱۷- و حاصل حد عبارت $+\infty$ شده است، بنابراین $x = -3$ باید ریشه مضاعف عبارت مخرج کسر باشد:

$$\begin{aligned} -2x^2 + ax + b &= -2(x+3)^2 = -2(x^2 + 6x + 9) = -2x^2 - 12x - 18 \\ \left. \begin{aligned} a &= -12 \\ b &= -18 \end{aligned} \right\} &\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

سوال ۱۷

گزینه درست: null

نهایی ۱۴۰۲

ساده

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

شکل

دشوار

تشریحی ۱۳۹۶

گزینه درست: null

سوال ۱۸

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^+} \left(\frac{3}{|-2x^2 - x + 1|} - \frac{4}{4x^2 - 1} \right) \\ = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^+} \left(\frac{3}{|2x^2 + x - 1|} - \frac{4}{(2x-1)(2x+1)} \right) \\ = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^+} \left(\frac{3}{|(2x-1)(x+1)|} - \frac{4}{(2x-1)(2x+1)} \right) \\ = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^+} \frac{3(2x+1) - 4(x+1)}{(2x-1)(x+1)(2x+1)} \\ = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^+} \frac{6x + 3 - 4x - 4}{(2x-1)(x+1)(2x+1)} \\ = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^+} \frac{2x-1}{(2x-1)(x+1)(2x+1)} = \frac{1}{\frac{3}{2} \times 2} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

ساده

تشریحی ۱۳۹۹

گزینه درست: null

سوال ۱۹

حد چپ f -اکیدا انزولی $x < 3 \rightarrow f(x) > f(3) \Rightarrow f(x) - 2 > 0$ \therefore حد چپ

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 6}{f(x) - 2} = \frac{3}{0^-} = +\infty$$

متوسط

نهایی ۱۴۰۲

گزینه درست: null

سوال ۲۰

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{(2 - \sqrt{x-1})(2 + \sqrt{x-1})}{(x-5)(2 + \sqrt{x-1})} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-(x-5)}{(x-5)(2 + \sqrt{x-1})} = \frac{-1}{4}$$

دشوار

تشریحی ۱۳۹۷

گزینه درست: null

سوال ۲۱

چون $f(x)$ در نقطه $x=1$ حدی مخالف صفر دارد، باید حد چپ و راست مخالف صفر باشد و با هم برابر باشند.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x^2 - 3x + a} = \frac{0}{1 - 3 + a} = \frac{0}{-2 + a} \Rightarrow a = 2$$

حد مخرج باید در $x=1$ صفر شود. چون اگر مخرج صفر نشود با توجه به اینکه حد صورت صفر است، حاصل حد راست صفر می‌شود که خلاف فرض مسئله است.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x^2 - 3x + a} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-2} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{b(x-1)}{|x-1|} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{b(x-1)}{-(x-1)} = -b \end{aligned} \right\} \Rightarrow -b = -1 \Rightarrow b = 1$$

$$\Rightarrow f(1) = a + b = 2 + 1 = 3$$

ساده

تشریحی ۱۳۹۸

گزینه درست: null

سوال ۲۲

توجه کنید که $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$ و مقادیر $f(x)$ در یک همسایگی راست نقطه $x=2$ کم‌تر از ۱ هستند. پس اگر $t = f(x)$ باشد و $x \rightarrow 2^+$ آن‌گاه $t \rightarrow 1^-$. بنابراین داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (f \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) = +\infty$$

وقتی $x \rightarrow 1$ علامت عبارت داخل قدرمطلق منفی است، پس:

$$x \rightarrow 1 : |x - 2| = 2 - x$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - |x - 2|}{\sqrt{x} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - (2 - x)}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{\sqrt{x} - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(x+2)}{\sqrt{x} - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x} + 1)(x + 2) = (2) \times (3) = 6 \end{aligned}$$

دقت کنید که ابهام حد، از نوع $\frac{0}{0}$ است.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1} = \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1} \times \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1} = 3$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x^2 - 8x + 4}{x^2 - 4x + 4} &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(3x-2)(x-2)}{(x-2)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x-2}{x-2} = -\infty \end{aligned}$$

چون حد تابع f^{-1} در $x = a$ برابر ۱ است برای محاسبه a باید حد تابع f را در $x = 1$ محاسبه کنیم. ابهام حد تابع f در $x = 1$ برابر $\infty - \infty$ است. مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2}{x-1} + \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 2)(x+1) + x^2 + x}{x^2 - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 2x - 2 + x^2 + x}{x^2 - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2 - 1} = \frac{0}{0} \quad (\text{ابهام } \frac{0}{0} \text{ دارد}) \\ \Rightarrow \text{حد} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2(x+2) - (x+2)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)(x^2 - 1)}{x^2 - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x+2) = 3 \Rightarrow a = 3 \end{aligned}$$

چون $x = 2$ مخرج کسر را صفر می‌کند، پس صورت نیز باید به ازای $x = 2$ صفر شود تا حد موجود و متناهی باشد:

$$4a + 8 = 0 \Rightarrow a = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2x^2 + 4x}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2x(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2x}{x+2} = -1$$

$$\Rightarrow b = -1$$

$$\xrightarrow{\text{حد خواسته شده}} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x+3)}{(x+2)(x-2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+3}{x-2} = \frac{1}{-4} = -0.25$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x-1}{1-\sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x-1}{\left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right)^2} = +\infty$$

توجه کنید که اگر $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ، صورت و مخرج کسر بالا مثبت هستند به طوری که حد صورت مخالف صفر و حد مخرج برابر صفر است.

اولاً $f(x)$ بر $x+a$ بخش پذیر است. پس:

$$x+a=0 \Rightarrow x=-a \Rightarrow f(-a)=0 \Rightarrow -a^2 + 2a^2 - a = 0$$

$$\Rightarrow -a(a^2 - 2a + 1) = 0 \Rightarrow -a(a-1)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=1 \end{cases}$$

$$a=0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{(x-0)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x^2 - 0}{x^2} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(x+2)}{x^2} = 2 \quad \text{غُق}$$

$$a=1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{2}{0^+} = +\infty \quad \text{ق ق}$$

از آنجا که مخرج $f(x)$ در نقطه $x = 1$ برابر صفر است، پس با توجه به وجود حد، باید صورت آن نیز صفر شود. این یعنی:

$$1 + a + b = 0 \Rightarrow b = -1 - a \quad (*)$$

در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax - 1 - a}{x + 3\sqrt{x} - 4} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+a+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(x+a+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+4)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x}+1)(x+a+1)}{(\sqrt{x}+4)} \\ &= \frac{2(a+2)}{5} \Rightarrow \frac{2(a+2)}{5} = 3 \Rightarrow a = 5/5 \end{aligned}$$

$$b = -1 - a = -6/5 \quad \text{با قراردادن } a = 5/5 \text{ در } (*) \text{ داریم:}$$

$$a - b = 5/5 - (-6/5) = 11 \quad \text{پس:}$$

حد عبارت‌های صورت و مخرج وقتی $x \rightarrow 1$ ، برابر صفر است. بنابراین $x - 1$ عامل هر دو عبارت صورت و مخرج است. با تقسیم صورت بر $x - 1$ داریم:

$$\begin{aligned} x^3 - 4x + 3 &= (x-1)(x^2 + x - 3) \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 4x + 3}{(x-1)^2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x - 3)}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 3}{x-1} = \frac{\text{معنی عدد}}{0^-} = +\infty \end{aligned}$$

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{[x] - 3}{x - 3} = \frac{[3^-] - 3}{3^- - 3} = \frac{2 - 3}{0^-} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$\begin{aligned} \text{ب) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x+1} - 2} &= \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x+1} - 2} \times \frac{\sqrt{x+1} + 2}{\sqrt{x+1} + 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+3)(x-3)(\sqrt{x+1} + 2)}{(x+1-4)} = \lim_{x \rightarrow 3} (x+3)(\sqrt{x+1} + 2) = 6 \times 4 = 24 \end{aligned}$$

وقتی مخرج به ازای $x = 4$ صفر می‌شود حتماً صورت کسر نیز به ازای $x = 4$ برابر صفر بوده که بعد از رفع ابهام، جواب حد یک عدد شده است.
(حتماً صورت کسر عامل $(x - 4)$ را داشته)

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - 4x} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x - 4)(x + m)}{x^2 - 4x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x - 4)(x + m)}{x(x - 4)} = \frac{4 + m}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow m = -1$$

$$\Rightarrow x^2 + ax + b = (x - 4)(x - 1)$$

$$\Rightarrow x^2 + ax + b = x^2 - 5x + 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -5 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow a + b = -1$$

می‌دانیم:

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{4}\right)^-} \tan x = +\infty$$

از طرفی وقتی که $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$ ، تساوی $[\sin x] = 0$ برقرار است، بنابراین داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{4}\right)^-} \frac{1 - [\sin x]}{1 + \tan x} = \frac{1 - 0}{1 + \infty} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

صورت و مخرج عبارت داده شده به ازای $x = \frac{\pi}{6}$ صفر می‌شود، پس باید کسر رفع ابهام شود، یعنی صفرکننده‌های صورت و مخرج را با هم ساده کنیم. برای این کار باید صورت و مخرج کسر را در مزدوج رادیکالی صورت ضرب کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\tan x} - \sqrt{\frac{1}{\tan x}}}{\cos^2 x} &= \frac{\sqrt{\tan x} - \sqrt{\frac{1}{\tan x}}}{\cos^2 x} \times \frac{\sqrt{\tan x} + \sqrt{\frac{1}{\tan x}}}{\sqrt{\tan x} + \sqrt{\frac{1}{\tan x}}} \\ &= \frac{\tan x - \frac{1}{\tan x}}{\cos^2 x (\sqrt{\tan x} + \sqrt{\frac{1}{\tan x}})} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x}}{\cos^2 x (\sqrt{\tan x} + \sqrt{\frac{1}{\tan x}})} \\ &= \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x (\sqrt{\tan x} + \sqrt{\frac{1}{\tan x}}) (\cos x \cdot \sin x)} \end{aligned}$$

$$\frac{-1}{(\sqrt{\tan x} + \sqrt{\frac{1}{\tan x}}) (\cos x \cdot \sin x)}$$

با جای‌گذاری رابطه $\cos^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x$ ، کسر بالا به صورت زیر ساده می‌شود:

حال حد خواسته شده به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{\tan x} - \sqrt{\frac{1}{\tan x}}}{\cos^2 x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{-1}{(\sqrt{\tan x} + \sqrt{\frac{1}{\tan x}}) (\cos x \cdot \sin x)} \\ &= \frac{-1}{(\sqrt{\tan \frac{\pi}{6}} + \sqrt{\frac{1}{\tan \frac{\pi}{6}}}) (\cos \frac{\pi}{6} \cdot \sin \frac{\pi}{6})} = \frac{-1}{(1+1) (\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2})} \\ &= \frac{-1}{2 \times \frac{1}{2}} = -1 \end{aligned}$$

✓

حد تابع f در همسایگی یکی از نقاط $x = \frac{\pi}{6}$ و $x = \frac{\pi}{3}$ باید نامتناهی باشد، یعنی طول موردنظر ریشه مخرج باشد اما ریشه صورت نباشد که $x = \frac{\pi}{6}$ در شرط گفته شده صدق می‌کند.

$$\tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow 3 \tan^2 \frac{\pi}{6} - 1 = 0$$

$$\sin^3 \left(\frac{\pi}{6} \right) + 1 = \sin \frac{\pi}{6} + 1 = 2$$

حال حد تابع f را در همسایگی چپ و راست $x = \frac{\pi}{6}$ حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{6})^-} \frac{\sin^3 x + 1}{3 \tan^2 x - 1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{6})^+} \frac{\sin^3 x + 1}{3 \tan^2 x - 1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

پس گزینه «۲» به درستی عبارت موردنظر را تکمیل می‌کند.

متوسط

تشریحی ۱۳۹۷

گزینه درست: null

سوال ۳۸

به رابطه زیر توجه کنید:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} f(x - 4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x - 4) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 3x - 4}{\sqrt{x} - 2} = \frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x+1)}{\sqrt{x}-2} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)(x+1)}{\sqrt{x}-2} = 20$$

متوسط

نهایی ۱۴۰۲

گزینه درست: null

سوال ۳۹

$$\frac{-1}{0^+} = -\infty$$

متوسط

تشریحی ۱۳۹۶

گزینه درست: null

سوال ۴۰

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x - [x+1]}{|x| - x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x - 0}{(-x) - x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x}{-2x} = -1$$

دشوار

تشریحی ۱۳۹۹

گزینه درست: null

سوال ۴۱

داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x + 2}{2\cos^2 x + \cos x - 1} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x + 2}{(\cos x + 1)(2\cos x - 1)} = \frac{2}{(0^+)(-3)} = -\infty$$

می دانیم که $\cos x + 1 \geq 0$ پس $\lim_{x \rightarrow \pi} (\cos x + 1) = 0^+$ است.

متوسط

تشریحی قلمچی ۱۳۹۸

گزینه درست: null

سوال ۴۲

چون حد به صورت $\frac{0}{0}$ می شود به صورت زیر حد را محاسبه می کنیم.

$$x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$$

$$x^2 + x - 10 \quad | \quad x-2$$

$$\underline{-(x^2 - 2x^2)} \quad x^2 + 2x + 5$$

$$2x^2 + x - 10$$

$$\underline{-(2x^2 - 4x)} \quad$$

$$5x - 10$$

$$\underline{-(5x - 10)} \quad$$

$$\circ \quad \Rightarrow x^2 + x - 10 = (x-2)(x^2 + 2x + 5)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 10}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 5)}{(x-2)(x+2)} = \frac{13}{4}$$

سوال ۴۳

گزینه درست: null

تشریحی ۱۳۹۷

متوسط

حد صورت -۲ است، پس باید حد مخرج ۰^+ شود. این در معادله درجه ۲ هنگامی امکان پذیر است که مخرج، ریشه مضاعف -۴ داشته باشد. یعنی $x^2 + ax + b = (x + ۴)^2$ باشد.

$$\Rightarrow x^2 + ax + b = x^2 + 8x + 16 \Rightarrow a = 8, b = 16$$

$$\Rightarrow a - b = -8$$

سوال ۴۴

گزینه درست: null

تشریحی ۱۳۹۹

دشواری

ابتدا مقدار جزء صحیح را در همسایگی عدد مورد نظر حد، به دست آورده و عبارت داده شده را ساده می کنیم. داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[x]}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[0^-]}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{\tan x} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

سوال ۴۵

گزینه درست: null

تشریحی ۱۳۹۵

دشواری

توجه کنید که مخرج هر یک از کسرهای به ازای $x = -1$ ، صفر می شود و حاصل عبارت مورد نظر، ابهام دارد که باید آن را رفع ابهام کنیم.

$$\text{وقتی } x \rightarrow (-1)^+ \text{ داریم: } |x| = -x$$

بنابراین حد به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \left(\frac{x-2}{x^2-1} + \frac{2}{x^2-x-2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \left(\frac{x-2}{(x-1)(x+1)} + \frac{2}{(x+1)(x-2)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{(x-2)^2 + 2(x-1)}{(x-1)(x+1)(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x^2 - 4x + 4 + 2x - 2}{(x-1)(x+1)(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x^2 - 2x + 2}{(x-1)(x+1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{5}{0^+} = +\infty \end{aligned}$$

سوال ۴۶

گزینه درست: null

تشریحی ۱۳۹۹

متوسط

با توجه به نمودار مشخص است که $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$ است.

$$\text{حال داریم: } \lim_{x \rightarrow 1^-} (f \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

خط $y = 0$ مجانب افقی نمودار تابع در $+\infty$ است و مقادیر تابع f در $+\infty$ در بازه $(-1, 0)$ قرار دارند. پس در $+\infty$ ، $[f(x)]$ با -1 برابر است و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} [(f \circ f)(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} -1 = -1$$

متوسط

تشریحی قلمچی ۱۳۹۵

گزینه درست: null

سوال ۴۷

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax - \sqrt{x^2 + x}}{3x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax - \left| x + \frac{1}{2} \right|}{3x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a-1)x - \frac{1}{2}}{3x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a-1)x}{3x} = \frac{a-1}{3} = 2 \Rightarrow a = 7$$

بنابراین: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{yx - \sqrt{x^2 + x}}{3x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{yx - |x|}{3x}$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{yx + x}{3x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\lambda x}{3x} = \frac{\lambda}{3}$$

متوسط

تشریحی قلمچی ۱۳۹۹

گزینه درست: null

سوال ۴۸

الف) $\frac{1}{F}$

ب)

$$f(x \pm T) = f(x), \quad x \pm T \in D_f$$

پ) -۳

اشتباهات متدوال:

در قسمت الف گاهی دانش آموزان به جای $\frac{1}{F}$ ، عبارت ۴ را قرار می دهند.

در قسمت پ گاهی دانش آموزان حد را +۳ حساب می کنند.

متوسط

نهایی ۱۴۰۰

گزینه درست: null

سوال ۴۹

الف) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 2x^2}{-x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{-x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} (-2) = -2(-\infty) = +\infty$

ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{5x^{10} - 2x + 3}}{\sqrt{x^2 + 2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{5x^{10}}}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{5}x^2 = \sqrt{5}(+\infty) = +\infty$

متوسط

تشریحی قلمچی ۱۳۹۷

گزینه درست: null

سوال ۵۰

الف) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \sin^2 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2 \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 = 2$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2 - x^2}{1 - x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2}{-x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4}{x} = 0$

پ) $3 - x > 0 \rightarrow x < 3$

تابع برای $x > 3$ تعریف نشده پس حد وجود ندارد

ت) $x \rightarrow 1^+ \rightarrow 1 < x < 2 \rightarrow [x] = 1$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - [x]}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - 1}{x - 1} = \frac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر نسبی}} = 0$

متوسط

نهایی ۱۴۰۷

گزینه درست: null

سوال ۵۱

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 1}{x - 5} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 3 - 0 = 3$$

متوسط

تشریحی ۱۳۹۷

گزینه درست: null

سوال ۵۲

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 2x - 1 + ax^2 + ax + bx + b}{x + 1} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(a+1)x^2 + (a+b+2)x - 1 + b}{x + 1} \right) = 3$$

$$a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$$

چون جواب حد در $+\infty$ عددی غیر صفر شده است، پس توان‌های بزرگ در صورت و مخرج باید برابر باشند:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a+b+2)x}{x} = 3 \xrightarrow{a=-1} \frac{-1+b+2}{1} = 3 \Rightarrow b = 2$$

$$\Rightarrow a - b = -1 - 2 = -3 \quad \text{در نتیجه:}$$

دشواری

تشریحی ۱۳۹۴

گزینه درست: null

سوال ۵۳

با استفاده از اتحاد $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$ خواهیم داشت:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2(x - \sqrt[3]{x^3+1})$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2(x - \sqrt[3]{x^3+1}) \times \frac{x^2 + x\sqrt[3]{x^3+1} + \sqrt[3]{(x^3+1)^2}}{x^2 + x\sqrt[3]{x^3+1} + \sqrt[3]{(x^3+1)^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(x^3 - x^3 - 1)}{x^2 + x\sqrt[3]{x^3+1} + \sqrt[3]{(x^3+1)^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{x^2 + x^2 + x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{3x^2} = -\frac{1}{3}$$

متوسط

تشریحی ۱۳۹۶

گزینه درست: null

سوال ۵۴

$(m-1)$ باید صفر شود، چون در غیر این صورت حاصل حد، بی‌نهایت خواهد شد (چرا؟).

$$m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{nx-1}}{3\sqrt{x+2}+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{nx}}{3\sqrt{x}} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{n}}{3} = 2 \Rightarrow \sqrt{n} = 6 \Rightarrow n = 36$$

$$\Rightarrow m + n = 1 + 36 = 37$$

متوسط

تشریحی قلمچی ۱۳۹۷

گزینه درست: null

سوال ۵۵

الف) مقدار $f(x)$ را می‌توان به هر مقدار دلخواه به ۳ نزدیک کرد

مشروط بر اینکه x به مقدار کافی کوچک و منفی اختبار شود.

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x+3}{ax-2} = -\frac{1}{a} = 3 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$

پ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5 + 2x + 3}{3x - x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3(x + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3})}{x^3(-1 + \frac{3}{x^3})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-1} = +\infty$

برای آن که حد تابع f وقتی $x \rightarrow 3$ برابر $+\infty$ شود، باید مخرج به ازای $x = 3$ صفر و در دو طرف آن \circ^- شود. در نتیجه مخرج باید ریشه مضاعف $x = 3$ داشته باشد. یعنی باید به صورت ضربی از $(x-3)^2$ باشد. بنابراین:

$$ax^2 + 6x + b = a(x-3)^2 \Rightarrow ax^2 + 6x + b = a(x^2 - 6x + 9)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -9 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \frac{2-x^2}{-x^2+6x-9}$$

برای محاسبه حد در بی‌نهایت، فقط به توان‌های بزرگ‌تر توجه می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2-x^2}{-x^2+6x-9} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{-x^2} = 1$$

با فرض $n \in \mathbb{N}$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^n + x^2 + 1}{3x^n - x^2 + 3} = \begin{cases} \frac{2}{3} & n > 3 \\ 1 & n = 3 \\ \infty & n < 3 \end{cases}$$

دقت کنید در حالتی که $n = 3$ است:

$$\text{حد} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + x^2 + 1}{3x^3 - x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3}{3x^3} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(m^2-1)x^3 + (2m+3)x^2 + 2x - \frac{1}{x}}{m + \frac{5}{x}} = \mathcal{F}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\left(\frac{m^2-1}{m} \right) x^3 + \left(\frac{2m+3}{m} \right) x^2 + \frac{2}{m} x \right) = -\infty$$

چون وقتی $x \rightarrow \pm\infty$ ، حاصل فقط برابر $-\infty$ است، باید ضریب x^3 صفر شود؛ یعنی $m = \pm 1$. اما مقداری از m قابل قبول است که ضریب x^2 به ازای آن منفی شود؛ بنابراین فقط $m = -1$ قابل قبول خواهد بود.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - ax + 2a}{ax - a + 1} = \frac{2-a}{a-1} = 2$$

$$\Rightarrow 2 - a = 2a - 2 \Rightarrow a = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + ax - 2a}{ax + x + 1} = \frac{2+a}{a+1}$$

$$= \frac{2 + \frac{4}{3}}{\frac{4}{3} + 1} = \frac{10}{7}$$

سوال ۶۰

گزینه درست: null

تشریحی ۱۳۹۵

متوسط

ابهام حد از نوع $\frac{\infty}{\infty}$ است. پس از هم‌ارزی جمله‌ی بزرگ‌تر برای رفع ابهام استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - \sqrt{x^2 + 2x - 1}}{x + \sqrt{1 - 2x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - \sqrt{x^2}}{x} \\ = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - |x|}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + x}{x} = 3$$

توجه کنید که: $|x| = -x$ وقتی $x \rightarrow -\infty$ داریم.

سوال ۶۱

گزینه درست: null

تشریحی قلم‌چی ۱۳۹۹

متوسط

(الف)

۱) $-\infty$ ۲) $+\infty$

۳) ۱

(ب)

۱) $+\infty$ ۲) $-\infty$

$$۳) \lim_{x \rightarrow (-\infty)} \frac{-2x + 3}{\sqrt{9x^2 + 6x}} = \lim_{x \rightarrow (-\infty)} \frac{-2x}{\sqrt{9x^2}} = \lim_{x \rightarrow (-\infty)} \frac{-2x}{|3x|} = \lim_{x \rightarrow (-\infty)} \frac{-2x}{-3x} = \frac{2}{3}$$

سوال ۶۲

گزینه درست: null

تشریحی ۱۳۹۸

دشوار

$$\sqrt{4x^2 + x} = \sqrt{4\left(x^2 + \frac{x}{4}\right)} = 2\sqrt{\left(x + \frac{1}{8}\right)^2 - \frac{1}{64}}$$

عدد $\frac{-1}{64}$ در $\pm\infty$ در کنار $\left(x + \frac{1}{8}\right)^2$ ناچیز است و از آن صرف‌نظر می‌شود:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2x + \sqrt{4x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 2x + 2\sqrt{\left(x + \frac{1}{8}\right)^2} \\ = \lim_{x \rightarrow \infty} 2x + 2\left|x + \frac{1}{8}\right| = 2x + 2x + \frac{1}{4} = 4x + \frac{1}{4} = +\infty$$

تذکر: در $x \rightarrow -\infty$ داخل قدرمطلق منفی است.

سوال ۶۳

گزینه درست: null

نهایی ۱۴۰۲

ساده

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{x^2}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 1}{x^3 - x^2} \rightarrow \frac{2x^2}{x^3} = 0$$

سوال ۶۴

گزینه درست: null

نهایی ۱۴۰۰

متوسط

الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^4 - 2x^2}{-x^4 + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^4}{-x^4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-4x) = -4(-\infty) = +\infty$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{5x^6 - 2x + 3}}{\sqrt{x^2 + 2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{5x^6}}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{5}x^2 = \sqrt{5}(+\infty) = +\infty$

سوال ۶۵

گزینه درست: null

نهایی ۱۴۰۲

متوسط

الف) $+\infty$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f \circ f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$

برای محاسبه ی حد در بی نهایت از جمله با درجه ی بزرگتر استفاده می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - |x|}{ax^n} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{ax^n} = 2 \Rightarrow n = 1, a = 2$$

چون c عدد حقیقی و مخالف صفر است، باید حد مخرج کسر صفر باشد، چون حد صورت صفر است.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - \sqrt{x^2 + 16x}}{2x + b} = c \Rightarrow 4 + b = 0 \Rightarrow b = -4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - \sqrt{x^2 + 16x}}{2x + b} = c \Rightarrow 4 + b = 0 \Rightarrow b = -4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - \sqrt{x^2 + 16x}}{2x - 4} : \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{9x^2 - x^2 - 16x}{2(x-2)(3x + \sqrt{x^2 + 16x})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{8x}{2(3x + \sqrt{x^2 + 16x})} = \frac{2}{3} = c$$

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x^2 - 8x}{\sqrt[3]{x} - 2} = \frac{(8)^2 - 8(8)}{\sqrt[3]{8} - 2} = \frac{64 - 64}{2 - 2} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x(x-8)}{\sqrt[3]{x} - 2} \times \frac{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4}{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x(x-8)(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4)}{x-8}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 8} x(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4) = (8)(\sqrt[3]{64} + 2\sqrt[3]{8} + 4) = (8)(4 + 4 + 4) = 96$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - x + 1}{ax^2 - 1} = 2 \xrightarrow{\text{بروان}} \frac{2x^2}{ax^2} = 2 \Rightarrow a = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 - x + 1}{x^2 - 1} \Rightarrow \frac{2(1) - (1) + 1}{(1^-)^2 - 1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 2}{ax - \sqrt{x^2 + 5}} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{ax - \sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{ax - |x|} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{ax + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x(a+1)} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{1}{a+1} = \frac{2}{5} \Rightarrow a+1 = \frac{5}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

اکنون حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ را از دو روش حساب می‌کنیم.

روش اول:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\frac{3}{2}x - \sqrt{x^2 + 5}} &\times \frac{\frac{3}{2}x + \sqrt{x^2 + 5}}{\frac{3}{2}x + \sqrt{x^2 + 5}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(\frac{3}{2}x + \sqrt{x^2 + 5})}{\frac{9}{4}x^2 - x^2 - 5} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\frac{3}{2}x + \sqrt{x^2 + 5})(x - 2)}{\frac{5}{4}x^2 - 5} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(\frac{3}{2}x + \sqrt{x^2 + 5})}{\frac{5}{4}(x - 2)(x + 2)} = \frac{3 + \sqrt{9}}{\frac{5}{4}(4)} = \frac{6}{5} = 1/2 \end{aligned}$$

روش دوم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\frac{3}{2}x - \sqrt{x^2 + 5}} &: \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\frac{3}{2} - \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 5}}} \\ &= \frac{1}{\frac{3}{2} - \frac{2}{\sqrt{9}}} = \frac{1}{\frac{3}{2} - \frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{9-4}{6}} = \frac{6}{5} = 1/2 \end{aligned}$$

خیر - زیرا تابع $f(x) = \frac{1}{|x| - 1}$ در همسایگی $x = 1$ تعریف نشده است.

(الف)

$$\text{آ)} \frac{-1}{0} = +\infty$$

$$\text{ب)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{(x+2)(x-1)(x+\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)}{(x+2)(x-1)(x+\sqrt{x})} = \frac{1}{6}$$

(ب)

$$\text{آ)} -2 \quad \text{ب)} +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1} \times \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{1}{2}$$

متوسط

تشریحی ۱۳۹۴

گزینه درست: null

سوال ۷۳

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - \sqrt{x^2 + 3x}}{ax + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - |x|}{ax}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - (-x)}{ax} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{ax} = \frac{3}{a}$$

چون حاصل حد برابر ۱ است، بنابراین:

$$\frac{3}{a} = 1 \Rightarrow a = 3$$

در نتیجه:

$$f(x) = \frac{2x - \sqrt{x^2 + 3x}}{3x + 1} \Rightarrow f(-3) = \frac{-6 - 0}{-9 + 1} = \frac{-6}{-8} = \frac{3}{4}$$

متوسط

نهایی ۱۴۰۲

گزینه درست: null

سوال ۷۴

$$\frac{3 + 0}{0 - 5} = -\frac{3}{5}$$

متوسط

تشریحی ۱۳۹۷

گزینه درست: null

سوال ۷۵

اگر $x \rightarrow +\infty$ ، مقادیر $\frac{2}{1-x}$ منفی هستند و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{1-x} = 0$ یعنی در $+\infty$ ، تابع $y = \left[\frac{2}{1-x} \right]$ با تابع $y = -1$ برابر است؛ در نتیجه:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \left[\frac{2}{1-x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} -(x+1) = -\infty$$

ساده

تشریحی ۱۳۹۹

گزینه درست: null

سوال ۷۶

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - a|x-1|}{\sqrt[3]{8x^3 - x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + ax}{2x} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{a+1}{2} = 2 \Rightarrow a+1 = 4 \Rightarrow a = 3$$

دشوار

تشریحی ۱۳۹۸

گزینه درست: null

سوال ۷۷

با ضرب کردن تابع در مزدوج رادیکالی آن، خواهیم داشت:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{2x} - \sqrt{4x - 2\sqrt{x}}) \times \frac{\sqrt{2x} + \sqrt{4x - 2\sqrt{x}}}{\sqrt{2x} + \sqrt{4x - 2\sqrt{x}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x - (4x - 2\sqrt{x})}{\sqrt{2x} + \sqrt{4x - 2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{2x} + \sqrt{4x - 2\sqrt{x}}}$$

در عبارت $4x - 2\sqrt{x}$ که زیر رادیکال قرار دارد، وقتی $x \rightarrow +\infty$ کافی است تنها توان بزرگتر را در نظر بگیریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{2x} + \sqrt{4x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{2x} + 2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}}{3\sqrt{x}} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax - \sqrt{fx - 3}}{\sqrt{x^2 - 2x + 9}} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax}{\sqrt{x^2}} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax}{|x|} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax}{x} = 1 \Rightarrow a = 1$$

حال حاصل حد خواسته شده را می‌یابیم:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x - \sqrt{fx - 3}}{\sqrt{x^2 - 2x + 9}} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x - \sqrt{fx - 3}}{\sqrt{(x - 3)^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x - \sqrt{fx - 3}}{|x - 3|} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x - \sqrt{fx - 3}}{-(x - 3)}$$

ابهام حد از نوع $\frac{0}{0}$ است، گویا می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x - \sqrt{fx - 3}}{-(x - 3)} \times \frac{x + \sqrt{fx - 3}}{x + \sqrt{fx - 3}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - fx + 3}{-(x - 3)(x + \sqrt{fx - 3})} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(x - 1)(x - 3)}{-(x - 3)(x + \sqrt{fx - 3})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(x - 1)}{-(x + \sqrt{fx - 3})} = \frac{2}{-(3 + 3)} = -\frac{1}{3}$$

با استفاده از قاعده‌ی هوییتال هم می‌توانید حاصل حد را محاسبه کنید:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x - \sqrt{fx - 3}}{-(x - 3)} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1 - \frac{f}{2\sqrt{fx - 3}}}{-1} = -1 + \frac{f}{2\sqrt{9}}$$

$$= -1 + \frac{f}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x - 3^{1-x}}{3^{-x} + 3^{x+1}} \simeq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x}{3^{x+1}} = \frac{3^x}{3 \times 3^x} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^k}{3x^k} = -\frac{1}{3} & ; k \leq 1 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^k}{3x^k} = \frac{1}{3} & ; k = 2 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^k}{2x^k} = \frac{3}{2} & ; k \geq 3 \end{cases}$$

با توجه به قضایای مربوط به حد در بی‌نهایت، می‌توانیم بنویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5x^5}{(x^3)(2x)} = \frac{-5}{2}$$

با توجه به صورت سوال، نمودار تابع f از نقطه $(۲, ۱)$ می‌گذرد، به عبارت دیگر $f(۲) = ۱$ داریم:

$$f(x) = \frac{ax+1+\sqrt{4x^2+9}}{3x-2} \xrightarrow{f(2)=1} \frac{2a+1+\sqrt{16+9}}{6-2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{2a+6}{4} = 1 \Rightarrow 2a+6=4 \Rightarrow 2a=-2 \Rightarrow a=-1$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{-x+1+\sqrt{4x^2+9}}{3x-2}$$

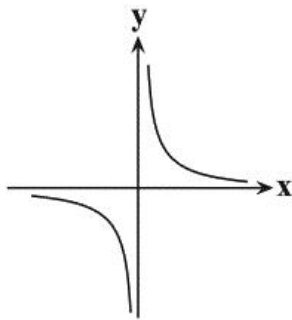
حال حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x+1+\sqrt{4x^2+9}}{3x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x+1+2|x|}{3x-2}$$

اگر $x \rightarrow +\infty$ ، آن‌گاه $x > 0$ و در نتیجه $|x| = x$ داریم:

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x+1+2x}{3x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{3x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ می‌دانیم:}$$

با توجه به نمودار مشخص است که:

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow 0^- \Rightarrow \left[\frac{1}{x}\right] = -1$$

حال حد عبارت داده شده را ساده‌تر می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^m \left[\frac{1}{x}\right] + 6x^2 - 1}{4x^2 - (1+n)x^m + 5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^m + 6x^2 - 1}{4x^2 - (1+n)x^m + 5} = \frac{3}{2}$$

از طرفی با توجه به این‌که حاصل حد فوق برابر یک عدد حقیقی شده است، می‌توان نتیجه گرفت که درجه بزرگ‌ترین جمله عبارت صورت و مخرج با هم برابرند.

لذا $m = 3$ بوده و خواهیم داشت:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^3 + 6x^2 - 1}{-(1+n)x^3 + 4x^2 + 5} = \frac{3}{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^3}{-(1+n)x^3} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{(1+n)} = \frac{3}{2} \Rightarrow n = \frac{1}{3}$$

بنابراین: $mn = 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - \sqrt{f(x)}}{1 - f(x)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{f(x)} (\sqrt{f(x)} - 1)}{(1 - \sqrt{f(x)}) (1 + \sqrt{f(x)})} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\sqrt{f(x)}}{1 + \sqrt{f(x)}} = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{[\cos 4x]}{\tan x} = \frac{[1^-]}{0^+} = \frac{0}{0^+} = 0$$

دقت کنید $\cos 4\pi = 1$ است و در مسائل حدی هر کجا سینوس و کسینوس یک شوند منظور 1^- است و $\tan \pi = 0$ است و π^+ در ناحیه سوم است و در این ناحیه، تانژانت مثبت است یعنی $\tan^+ = 0^+$ است.

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x-6)(2x-7)(4x+1)}{17x^3+5} \rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x)(2x)(4x)}{17x^3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8x^3}{17x^3} = \frac{8}{17}$$

حاصل حد در $+\infty$ برابر $-\frac{2}{3}$ شده است. طبق قضیه ۹ صفحه ۶۵ کتاب درسی، می‌دانیم این در صورتی امکان‌پذیر است که درجه‌های عبارت‌های صورت و مخرج برابر باشند. حال اگر $m = 0$ باشد، درجه صورت برابر ۲ خواهد بود. پس n نیز باید برابر ۲ باشد و در این صورت

$$\text{داریم: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{6x^2-x} = \frac{1}{6} \neq -\frac{2}{3}$$

بنابراین این حالت امکان‌پذیر نیست. در نتیجه $m \neq 0$ و درجه عبارت صورت برابر ۳ است.

$$\Rightarrow n = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{mx^3}{6x^3} = \frac{m}{6} = -\frac{2}{3} \Rightarrow m = -4$$

$$\Rightarrow m + n = -1$$

الف) $-\infty$

ب) $+\infty$

پ) -2

از آنجایی که حاصل حد عددی غیرصفر شده است، بنابراین باید درجه‌های صورت و مخرج با هم برابر باشند. لذا دو حالت امکان‌پذیر است:

حالت $n < 5$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|3a|x^5 - ax^n + 7x^2 - 2}{4x^5 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|3a|x^5}{4x^5} = \frac{|3a|}{4} = 1$$

$$\Rightarrow |3a| = 4 \Rightarrow a = \pm \frac{4}{3}$$

حالت $n = 5$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|3a|x^5 - ax^5 + 7x^2 - 2}{4x^5 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(|3a| - a)x^5}{4x^5} = \frac{|3a| - a}{4} = 1$$

$$\Rightarrow |3a| = 4 + a \Rightarrow \begin{cases} 3a = 4 + a \Rightarrow a = 2 & \text{ق ق} \\ 3a = -4 - a \Rightarrow a = -1 & \text{ق ق} \end{cases}$$

بنابراین مجموع مقادیر ممکن برای a برابر است با: $\frac{4}{3} - \frac{4}{3} + 2 - 1 = 1$

وقتی $x \rightarrow 3$ ، مقادیر تابع f با مقادیر بیشتر از صفر به صفر نزدیک می‌شوند، بنابراین داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{f(x)} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(g(x)) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 2$$

همچنین وقتی $x \rightarrow 1^-$ ، مقادیر تابع f با مقادیر کمتر از صفر به صفر نزدیک می‌شوند، بنابراین داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{f(x)} = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(g(x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(t) = -2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(g(x)) - \lim_{x \rightarrow 1^-} f(g(x)) = 2 - (-2) = 4$$